FEUILLE DE TD

Matrices, Par 5 points passe une conique, $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions

---

Matrices

Exercice 1.
Calculer :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} + 5.\begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2.
Calculer :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 3. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
• Calculer $A^2 - A - 2I_3$.
• En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 4. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $N^m = 0$ pour un certain entier $m \geq 1$. (on dit que N est **nilpotente**)
• Montrer que N n'est pas inversible.
• Montrer que $I_n - M$ est inversible.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 2I_3$.
• Calculer B^n pour tout $n \geq 0$.
• En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 6. Echelonner les matrices suivantes avec des opérations élémentaires sur les lignes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^2 = -I_n$.

1. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1}.
2. Pour $Y \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, résoudre l'équation $AX = Y$.

Exercice 8. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & -3 \\ 2x_1 + x_2 & = & 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 0 + 5x_3 & = & 1 \\ -2x_1 + x_2 + 0 & = & 1 \end{cases}$

Exercice 9.
Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 14 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} a & 2a \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.
Calculer le rang des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{K}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
4. B, B^2, et B^3, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 11.
Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure :
$A = \begin{pmatrix} a_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $\Pi_{i=1}^n a_i \neq 0$, alors $rg(A) = n$.
2. Montrer que si $\Pi_{i=1}^n a_i = 0$, alors $rg(A) < n$.

Exercice 12.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On définit un endomorphisme φ de E par $\varphi(e_1) = -e_1 + 2e_3$, $\varphi(e_2) = e_2 + 2e_3$ et $\varphi(e_3) = 2e_1 + 2e_2$.

1. Donner l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.

Exercice 13.
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\ker u \subset \ker(v \circ u)$ et que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.

■ *Dev : Par 5 points du plan affine passe une conique* ■

Exercice 14. Soient P un plan affine, et A, B, C, D, E 5 points distincts de P. On veut montrer qu'il existe une conique Q qui passe par ces 5 points.

1. Rappeler les différentes formes d'une conique dans un plan.

2. **Cas particulier :**
On suppose que 4 ou 5 points sont alignés.
Montrer qu'il existe une infinité de coniques passant par les 5 points.

3. **Cas général :** On suppose que les 5 points ne sont pas tous alignés.
   (a) Montrer qu'il existe au moins 3 points qui ne sont pas alignés.
   (b) Quitte à permuter les noms, on suppose que A, B, C ne sont pas alignés. Ces points forment une base affine du plan affine P. Pour M un point de P, on notera (X, Y, Z) ses coordonnées barycentriques dans cette base.
   Soit T une conique dans P.
   Donner la forme de l'équation algébrique associée à T, en fonction des coordonnées dans la base affine (A, B, C).
   (c) Soit Q une conique passant par A, B, C.
   Montrer que l'équation de la conique Q est : $(E)\ pYZ+qXZ+rXY=0$, avec $p, q, r \in \mathbb{R}$ des constantes.
   (d) On pose (x, y, z) les coordonnées barycentriques de D, et (x', y', z') les coordonnées barycentriques de E.
   Montrer que la conique Q passe aussi par D et E si et seulement si p, q, r sont les solutions d'un système linéaire S que l'on déterminera.

4. **Etude du système linéaire : Rang et solution unique**
   (a) Montrer que l'on a $rg(S) \leq 2$, où $rg(S)$ désigne le rang du système linéaire S.
   (b) En déduire qu'il existe au moins une conique Q passant par A, B, C, D, E.
   (c) Montrer qu'il existe une unique conique Q passant par A, B, C, D, E si et seulement si $rg(S) < 2$.
   (d) Peut-on avoir $rg(S) = 0$?

5. **Cas où $rg(S) < 2$:**
   (a) Soient D_1, D_2, D_3 les trois déterminants extraits de taille 2×2 issus du système S.
   Montrer que l'on a $rg(S) < 2$ si et seulement si $D_1 = D_2 = D_3 = 0$.
   (b) Montrer que D et E n'appartiennent pas aux droites $(AB), (BC), (CA)$ si et seulement si $xx'yy'zz' \neq 0$.
   (c) Montrer que D_1, D_2, D_3 sont égaux aux déterminants : $zz'\begin{vmatrix} 0 & x & x' \\ 0 & y & y' \\ 1 & z & z' \end{vmatrix}$,
   $yy'\begin{vmatrix} 0 & x & x' \\ 1 & y & y' \\ 0 & z & z' \end{vmatrix}$, $xx'\begin{vmatrix} 1 & x & x' \\ 0 & y & y' \\ 0 & z & z' \end{vmatrix}$.

6. **Première conclusion :**
   (a) On suppose que D et E n'appartiennent pas aux droites $(AB), (BC), (CA)$.
   Montrer par l'absurde que l'on a alors $rg(S) = 2$. On pourra s'aider de la question précédente.
   (b) On suppose maintenant que $rg(S) = 1$, et que $D \in (AB)$.
   Montrer qu'on a alors $E \in (AB)$.
   (c) En déduire que si $rg(S) = 1$, alors 4 des 5 points sont alignés.

7. En déduire qu'il existe une unique conique passant par A, B, C, D, E si et seulement si au plus 3 points parmi 5 sont alignés.

8. **Etude du cas où Q est unique :**
On suppose qu'au plus 3 points parmi A, B, C, D, E sont alignés. Alors A, B, C forment un repère affine. Soit Q l'unique forme quadratique passant par A, B, C, D, E, d'équation associée $pYZ + qXZ + rXY = 0$.
   (a) Ecrire la matrice M' associée à la conique Q dans la base affine associée.
   (b) On suppose que $p = 0$.
   Déterminer la forme de la conique Q.
   En déduire que 3 points parmi les 5 sont alignés.

9. **Conique dégénérée et déterminant :**
   (a) Rappeler la relation entre conique Q non dégénérée et valeurs du déterminant de M'.
   (b) Calculer $\det(M')$.
   (c) Montrer que Q est non-dégénérée si et seulement si $pqr \neq 0$.
   (d) En déduire que si Q est dégénérée, alors 3 points parmi les 5 sont alignés.

10. **Deuxième conclusion :**
    (a) Réciproquement, on suppose que 3 points parmi les 5 sont alignés. Montrer que Q est l'intersection de deux droites.
    (b) Soit F le point d'intersection des deux droites. Montrer qu'il existe deux points F', F'' parmi A, B, C tels que (F, F', F'') soit un repère affine.
    (c) En écrivant la forme quadratique associée à Q dans le nouveau repère affine, montrer que la conique Q est dégénérée.
11. En déduire que Q est dégénérée si et seulement si 3 points parmi les 5 sont alignés.

■ *Dev : $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions* ■

Exercice 15. Soit H l'ensemble des quaternions. On a $H = \{a + ib + jc + kd,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -k, jk = -i, ki = -j$ (càd $ijk = 1$). C'est une $\mathbb{R}$-algèbre (un $\mathbb{R}$-ev et un anneau).

1. **Rappels sur H :**
    (a) Calculer $ijji$. En déduire la valeur de ji, et montrer que H est un anneau non-commutatif.
    (b) Quelle est la dimension de H en tant que $\mathbb{R}$-ev ? Donner une base de H comme $\mathbb{R}$-ev.
    (c) Pour $x = a + ib + cj + dk \in H$, on pose $\bar{x} = a - ib - jc - dk$.
    Calculer $x\bar{x}$ et montrer que $x\bar{x} \in \mathbb{R}^+$.
    (d) On pose $N(x) = \sqrt{x\bar{x}}$. C'est une norme sur H. En regardant H comme $\mathbb{R}$-e.v., à quelle norme usuelle correspond-elle ?
    Quel type d'e.v. normé est l'ensemble $(H, N(.))$?
    (e) Donner l'expression du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ associé à la norme N.
    (f) Montrer que pour tous $x, y \in H$ on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
    (g) Montrer que pour tout $x \in H$, $x \neq 0$, x est inversible dans H. Donner une expression de x^{-1}
    (h) Montrer que $N(x^{-1}) = \frac{1}{N(x)}$.
    (i) Soit $Z(H)$ le centre de H pour $\times$ (l'ensemble des x tels que $xy = yx$, $\forall y$).
    Montrer que $H = \{a,\ a \in \mathbb{R}\} = Vect(1)$.
2. **Groupe des quaternions de module 1 :**
    (a) On pose $G : \{x \in H \text{ t.q. } N(x) = 1\}$, l'ensemble des quaternions de norme 1 (ou de module 1).
    Montrer que G est un groupe.
    (b) Pour $q \in G$, montrer que $q^{-1} = \bar{q}$.
3. **Automorphismes intérieurs :**
    (a) Soit $q \in G$ de norme 1. On définit $S_q : x \in H \mapsto qxq^{-1} \in H$.
    (b) Montrer que S_q est une application linéaire bijective sur H.
    (c) En utilisant la famille $(1, i, j, k)$, montrer que S_q s'identifie à une matrice de $Gl_4(\mathbb{R})$.
    (d) Soient $q, q' \in H$. Calculer $S_{qq'}(x)$ en fonction de S_q et S'_q.
    (e) En déduire que $S : q \mapsto S_q$ est un morphisme de groupes de G vers $Gl_4(\mathbb{R})$.
    (f) Montrer que $Ker(S) = \{-1, 1\}$.
    (g) Montrer que pour tout $x \in H$, on a $N(S_q(x)) = N(x)$.
    (h) En déduire que $S_q \in O_4(\mathbb{R})$.
    La fonction ϕ est un morphisme de G vers le groupe orthogonal $O_4(\mathbb{R})$.
4. **Restriction à la dimension 3 :**
    (a) On pose $P = Vect(i, j, k)$ l'ensemble des quaternions purs.
    Pour $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire associé à N, montrer que P est l'orthogonal de la droite vectorielle $\mathbb{R} = Vect(1)$.
    (b) Soit $q \in G$. Montrer que $\mathbb{R} = Vect(1)$ est un sous-ev stable par S_q, et que $S_q|_{\mathbb{R}} = Id_{\mathbb{R}}$.
    (c) En déduire que P est un sous-ev stable par S_q.
    (d) On pose $s_q = S_q|_P$.
    (e) Montrer que l'application linéaire $s_q : P \to P$ est bijective, et préserve la norme $N(.)$ sur P.

(f) En déduire que s_q s'identifie à une matrice de $Gl_3(\mathbb{R})$, qui est dans $O_3(\mathbb{R})$.
On obtient ainsi $s : q \in G \mapsto s_q \in O_3(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes.

5. **Etude de la restriction :**
   (a) Montrer que $Ker(s) = \{-1, 1\}$.
   (b) Pour $q = a + ib + jc + kd$, montrer que s_q est une matrice dont les coefficients sont des polynômes en les coefficients de q.
   (c) En déduire que $q \mapsto s_q$ est une fonction continue (pour les topologies associées aux normes considérées sur G et $O_3(\mathbb{R})$).
   (d) Montrer que G est un ensemble connexe de H.
   (e) En déduire que $(\det \circ s)(G) = \{1\}$.
   (f) En déduire que $s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$.
6. **Etude de la restriction 2 :**
   (a) Soit $p = ib + jc + dk \in P \cap H$. Montrer que $s_p(p) = p$.
   (b) En déduire que s_p est une rotation orthogonale d'axe $Vect(p)$.
   (c) Montrer que $p = -\bar{p}$, et en déduire que $p^2 = -1$.
   (d) En déduire que $(s_p)^2 = Id_P$.
   (e) En regardant les valeurs propres de s_p, montrer que s_p est la symétrie axiale d'axe $Vect(p)$.
   (f) Réciproquement, montrer que pour tout $p' \in P$ non-nul, la symétrie axiale d'axe $Vect(p')$ est dans $Im(s) = s(G)$.
   (g) On rappelle que $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les symétries axiales.
   En déduire l'ensemble image $Im(s)$.
7. **Conclusion :** En déduire qu'il existe un isomorphisme de $G/\{-1, 1\}$ vers $SO_3(\mathbb{R})$.
   Le groupe spécial orthogonal sur $\mathbb{R}^3$ s'identifie au groupe des quaternions de module 1, quotienté par un sous-groupe très facile.